Teoria ergodyczna
WPPT Matematyka, IIIr. semestr zimowy 2008/9
Wykład 7

19/10/08

Lemat Rochlina

Twierdzenie (Lemat Kakutaniego-Rochlina): Niech $(X, \mathcal{F}, \mu, T)$ będzie miarowym układem dynamicznym z ergodyczną miarą probabilistyczną **bezatomową** i odwzorowaniem zachowującym miarę (niekoniecznie odwracalnym). Wtedy dla każdego $\epsilon > 0$ i $m \geq 0$ istnieje zbiór mierzalny E taki, że zbiory $E, T^{-1}(E), \ldots, T^{-m+1}(E)$ są parami rozłączne oraz ich suma ma miarę nie mniejszą niż $1 - \epsilon$. Rodzina tych zbiorów nazywa się *wieżą Rochlina.*

$$\begin{array}{l}
— \\
\downarrow \\
— \\
\downarrow \\
— \\
\downarrow \\
— \\
\downarrow \\
— \\
\downarrow \\
— \\
\downarrow \\
— \\
\downarrow \\
— \\
\downarrow \\
— \\
\downarrow \\
— \ E \qquad\qquad —— \ \text{reszta przestrzeni nie przekraczająca miary } \epsilon
\end{array}$$

Ćwiczenie: Sprawdź, że jeśli miara w układzie ergodycznym ma chociaż jeden atom, to cały układ jest orbitą skończoną okresową i powyższe twierdzenie nie zachodzi (dla jakich m ?).

Będziemy stosować oznaczenia z poprzedniego wykładu dot. drapacza chmur.

Gdy T jest odwracalne, dowód jest o wiele łatwiejszy. Bowiem drapacz chmur można wtedy podzielić na ,,kolmny" o mierzalnych piętrach: kolumna n-ta to zbiór

$A_{n-1} \setminus T(A_n)$ $(n = 1, 2, \dots)$ i jego kolejne obrazy aż do $(n-1)$-szego, zawartego w A.

Zadanie 1: $A_{n-1} \setminus T(A_n) = T(C_n)$ (dla T odwracalnego – patrz rysunek poniżej).

Zadanie 2: $\sum_{n=1}^{\infty} n\mu(C_n) = 1$ (dla T odwracalnego).

S rozkłada się na przeliczalnie wiele takich kolumn, a każda z nich na piętra, których jest n w kolumnie numer n. Na rysunku (poniżej) jest widoczny podział na kolumny: mają one szerokość pojedynczej kreski, czego nie należy interpretować, że ich podstawy mają jednakową miarę. Natomiast, z zachowywania miary, wszystkie piętra jednej kolumny mają jednakową miarę. Gdy T jest nieodwracalne, operowanie obrazami zbiorów (a takie występują w definicji kolumny) może prowadzić do zbiorów niemierzalnych. Poza tym obrazy dwóch pięter rozłącznych mogą być nierozłączne. Dlatego najpierw przeprowadzimy dowód twierdzenia przy dodatkowym założeniu odwracalności.

Dowód dla T odwracalnego:
Zacznijmy od zbioru A o mierze mniejszej niż $\frac{\epsilon}{m}$ (jest to możliwe bo miara jest bezatomowa). Przedstawmy X jako drapacz chmur nad A z podziałem na kolumny. Dla każdego $n \geq 1$ z kolumny n-tej (o wysokości n) wybierzmy piętra co m-te licząc o góry (nad pierwszym wybranym piętrem ma zostać $m-1$ nie wybranych pięter). Wybrane piętra z wszystkich wież sumujemy i to jest zbiór E.

$$\begin{array}{l}
\vdots \\
\cdots = \\
\cdots - = \\
\cdots - - = \\
\cdots \overset{E}{-} - - = \\
\cdots - \overset{E}{-} - - = \\
\cdots - - \overset{E}{-} - - = \\
\cdots \overset{E}{-} - - \overset{E}{-} - - = \\
\cdots - \overset{E}{-} - - \overset{E}{-} - - = \\
\cdots - - \overset{E}{-} - - \overset{E}{-} - - = \overset{C_1}{\swarrow} \\
\cdots \overset{E}{-} - - \overset{E}{-} - - \overset{E}{-} - - A
\end{array}$$

Rysunek dla $m = 3$. Znaki równości nie należą do drapacza. To ,,powtórzone" zbiory C_n (jest to ilustracja do Zadania 1). ,,Powtórzone", bo ,,oryginały" są podzbiorami A_0, czyli podstawy drapacza – tylko tam ,,nie wiadomo" gdzie one są.

Jest oczywiste, że m kolejnych przeciwobrazów E jest parami rozłącznych, a ich suma wypełnia cały drapacz chmur z wyjątkiem podzbioru sumy pierwszych m jego pięter. Ale pierwsze m piętra są zawarte w pierwszych m przeciwobrazach zbioru A, miara tego nie przekracza $m\mu(A) < \epsilon$. $\square$

Dla odwzorowań nieodwracalnych, jak już mówiliśmy, nie można dla dowolnego zbioru A ,,bezpiecznie" dzielić drapacza na kolumny. Jednak dla zbioru A który jest **dalekim przeciwobrazem** innego zbioru da się zdefiniować mierzalne kolumny przynajmniej do ustalonego wcześniej numeru $N \in \mathbb{N}$. Oprócz pokazania tego faktu w trzeba będzie jeszcze zapewnić, że miara sumy tych N kolumn przekroczy $1-\epsilon$ (wtedy wieża Rochlina wypełni $1-2\epsilon$).

Szkic dowodu dla T nieodwracalnego
Dowód opiera się na trzech obserwacjach. Dwie pierwsze stanowią **ćwiczenia:**

1. Jeśli $A = T^{-N-1}(A')$ dla pewnego zbioru mierzalnego A' to sigma-ciało Σ generowane przez zbiory $T^n(A)$ gdzie $n \in [-\infty, N]$ składa się ze zbiorów mierzalnych i T przeprowadza zbiory z Σ na zbiory mierzalne i zachowuje na nich miarę ,,w przód" (tzn. $\mu(B) = \mu(T(B))$) oraz zachowuje działania na zbiorach (np. $T(B_1 \cap B_2) = T(B_1) \cap T(B_2)$), w szczególności zachowuje rozłączność.

2. Dla A jak wyżej w drapaczu chmur nad A można zdefiniować kolumny o numerach $1, 2, \ldots, N$ i ich piętra należą do Σ.

Oczywiście $\mu(A) = \mu(A')$ więc łatwo spełnić warunek $\mu(A) < \frac{\epsilon}{m}$. Na mocy ćwiczeń 1. i 2. można powtórzyć dowód jak w przypadku odwracalnym z tą jednak różnicą, że zbiór E wybierzemy tylko z pierwszych N kolumn. Również dla $n \leq N$ zbiory C_n należą do Σ, zatem prawdziwe jest też Zadanie 1. Trzeba jeszcze zagwarantować, że miara sumy kolumn od 1 do N jest odpowiednio duża. I to będzie trzecia (najtrudniejsza) obserwacja:

3. Miara sumy pierwszych n kolumn w drapaczu chmur nad $T^{-N-1}(A')$ nie zależy od N (o ile tylko $N \geq n$). Ponadto, oznaczając tą miarę przez M_n mamy $\lim M_n = 1$.

Dowód 3. Pierwsze zdanie wynika wprost z niezmienniczości miary i tego, że piętro k w kolumnie n drapacza dla $T^{-N-M-1}(A')$. jest M-tym przeciwobrazem odpowiedniego piętra dla $T^{-N-1}(A')$ (bo T^{-M} zachowuje działania na zbiorach).
Drugie zdanie jest oczywiste dla odwzorowań odwracalnych, gdzie wszystkie liczby M_n można zdefiniowac w jednym drapaczu i są to miary zbiorów rosnących do całej przestrzeni. Trudność w przypadku nieodwracalnym polega na tym, że kolejne liczby M_n obliczamy w różnych drapaczach.
Zacznijmy od drapacza nad zbiorem A'. Jest on sumą rozłączną pięter. Zatem istnieje numer piętra N_0 taki, że suma pięter wyższych ma miarę mniejszą niż $\frac{\epsilon}{2}$.
Wiemy, że $A' = \bigcup C'_n$ (suma rozłączna zbiorów, gdzie czas powrotu do A' wynosi n). Zatem istnieje $N > N_0$ takie, że suma miar kolumn od numeru $N+1$ jest mniejsza od $\frac{\epsilon}{2N_0}$.
Teraz popatrzmy na drapacz nad $A = T^{-N-1}(A)$. Piętra tego drapacza są $(N+1)$-szymi przeciwobrazami odpowiednich pięter drapacza nad A', zatem mają takie same miary, zatem spełniony jest warunek na sumę pięter powyżej N_0. Teraz trzeba zauważyć, że dla każdego n zbiór C_n (punktów z A, gdzie czas pierwszego powrotu do A wynosi n) jest równy $(N+1)$-szemu przeciwobrazowi zbioru C'_n. Zatem C_n mają one takie same miary jak C'_n, więc suma C_n od numeru $N+1$ jest mniejsza od $\frac{\epsilon}{2N_0}$. Piętra kolumn do numeru N są mierzalne, zatem mierzalne są ich dopełnienia w piętrach drapacza chmur. W bazie jest to zbiór o mierze takiej jak miara A minus suma miar zbiorów C_n od 1 do N, czyli w bazie jest to zbiór o mierze

mniejszej niż $\frac{\epsilon}{2N_0}$. Podobnie jest w wyższych piętrach, bo tam przechodzimy przez przeciwobrazy. Dopełnienie pierwszych N kolumn (w calym drapaczu) dzielimy na dwie części: do piętra N_0 i ponad. Część do piętra N_0 ma miarę co najwyżej $N_0 \frac{\epsilon}{2N_0} = \frac{\epsilon}{2}$. To co ponad piętrem N_0 też ma miarę nie przekraczającą $\frac{\epsilon}{2}$. Czyli miara dopełnienia N kolumn nie przekracza ϵ. $\square$